CÂTEVA PROPRIETĂȚI ALE ORTOCENTRULUI UNUI TRIUGHI

1) **Simetricele ortocentrului unui triunghi față de laturile acestuia aparțin cercului circumscris triunghiului.**

Ca să rezolvați mai ușor problema am reformulat-o astfel:

Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $\mathscr{C}$. Dacă D este piciorul înălțimii din A, H este ortocentrul triunghiului și A' este al doilea punct de intersecție al înălțimii AD cu cercul $\mathscr{C}$, demonstrați că:

a) $m(\prec CBA') = 90^\circ - m(\prec ACB)$;

b) triunghiul BHA' este isoscel;

c) punctele H și A' sunt simetrice față de BC.

2) **Simetricele ortocentrului unui triunghi față de mijloacele laturilor acestuia aparțin cercului circumscris triunghiului.**

Ca să rezolvați mai ușor problema am reformulat-o astfel:

Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $\mathscr{C}$(0). Dacă H este ortocentrul triunghiului, M mijlocul laturii [BC], N mijlocul laturii [AC], demonstrați că:

a) triunghiurile AHB și MON sunt asemenea;

b) AH = 2OM;

c) simetricul punctului H față de M aparține cercului $\mathscr{C}$.

3) Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $\mathscr{C}$(0). Înălțimile BE (E $\in$ AC) și CF (F $\in$ AB) reintersectează cercul $\mathscr{C}$ respectiv în B_1 și C_1. Dacă M este mijlocul laturii [BC] demonstrați că:

a) M aparține mediatoarei segmentului [EF];

b) dreptele EF și B_1C_1 sunt paralele;

c) A este mijlocul arcului B_1C_1;

d) dreptele OA și EF sunt perpendiculare,

4) Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $\mathscr{C}$(0) și cu ortocentrul H. Perpendiculara în B pe BC reintersectează cercul $\mathscr{C}$ în M. Demonstrați că:

a) patrulaterul AHBM este paralelogram;

b) A este ortocentrul triunghiului BHC;

c) centrul cercului $\mathscr{C}$' circumscris triunghiului BHC este simetricul punctului O față de BC;

d) dreapta AB reintersectează cercul $\mathscr{C}$' în punctul A" care este simetricul punctului A față de înălțimea din C a triunghiului ABC.

5) Se consideră triunghiul nedreptunghic ABC înscris în cercul $\mathscr{C}$(0). Înălțimea din A a triunghiului reintersectează cercul $\mathscr{C}$ în punctul A'. Demonstrați că simetricele dreptelor OB, OC și OA' față de AB, AC și respectiv BC sunt trei drepte paralele.

6) Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC de ortocentru H și fie A', B', C' picioarele înălțimilor din A, B și respectiv C. Se consideră punctele D, E, F astfel încât $\mathrm{D} \in (\mathrm{HA}$, $[\mathrm{DH}] \equiv [\mathrm{BC}]$, $\mathrm{E} \in (\mathrm{HB}$, $[\mathrm{BE}] \equiv [\mathrm{AC}]$, $\mathrm{F} \in (\mathrm{HC}$, $[\mathrm{CF}] \equiv [\mathrm{AB}]$.

a) Demonstrați că $\prec \mathrm{A'HC} \equiv \prec \mathrm{ABC}$ și $\prec \mathrm{A'HB} \equiv \prec \mathrm{ACB}$.

b) Construiți FM ‖ BH, M $\in$ AH și demonstrați că $\Delta\mathrm{FHM} \equiv \Delta\mathrm{ABC}$.

c) Demonstrați că H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1) a) $m(\prec \mathrm{CBA'}) = m(\prec \mathrm{CAA'}) = \dfrac{1}{2} m(\mathrm{arc\ A'C})$.

b) $m(\prec \mathrm{CBH}) = 90^\circ - m(\prec \mathrm{ACB})$.
c) În triughiul isoscel A'BH bisectoarea BD a unghiului HBA' este axă de simetrie.
2) a) Cele două triunghiuri au laturile respectiv paralele.
b) $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AH}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2}$.
c) $\mathrm{AO} \cap \mathrm{MH} = \{\mathrm{P}\}$. [OM] este linie mijlocie în $\Delta\,\mathrm{AHP} \Rightarrow$ AO = OP și HM = MP.
P este punctul diametral opus lui A în cercul $\mathscr{C}$.
3) a) ME = MF = $\dfrac{1}{2}$BC (sunt mediane în triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza [BC]).
b) Conform problemei 1, B_1 și C_1 sunt simetricele punctului H față de AC respectiv BC.
[EF] este linie mijlocie în $\Delta\,\mathrm{HB_1C_1} \Rightarrow \mathrm{EF} \parallel \mathrm{B_1C_1}$.
c) $\mathrm{AC_1} = \mathrm{AH} = \mathrm{AB_1} \Rightarrow \mathrm{arc\,AC_1} \equiv \mathrm{arc\,AB_1}$.
d) $\mathrm{OA} \perp \mathrm{B_1C_1}$.
4) a) M este punctul diametral opus lui C în cercul $\mathscr{C}$. Din problema 2 rezultă că M este simetricul punctului H față de mijlocul laturii [AB].
b) AC și BC sunt înălțimi în $\Delta\,\mathrm{BHC}$.
c) Folosim relația lui Sylvester în triunghiurile HBC și ABC.
$\overrightarrow{\mathrm{O'A}} = \overrightarrow{\mathrm{O'H}} + \overrightarrow{\mathrm{O'B}} + \overrightarrow{\mathrm{O'C}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{O'O}} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$.
d) Cercurile $\mathscr{C}$ și $\mathscr{C}$' sunt congruente.
$m(\prec \mathrm{AA''C}) = m(\prec \mathrm{BA''C}) = 180^\circ - m(\prec \mathrm{BAC})$.
Triunghiul AA"C este isoscel.
5) Dacă B' este simetricul punctului O față de AC, atunci AOCB' este romb și CB' ∥ AO.
Analog BC' ∥ AO, C' = s_{AB}(O).
Dacă O' este simetricul punctului O față de BC, atunci simetrica dreptei OA' față de BC este NO', unde {N} = OA' ∩ BC. Triunghiurile isoscele OAA' și NOO' au unghiurile de la bază respectiv congruente (OO' ∥ AA' $\Rightarrow \prec \mathrm{O'ON} \equiv \prec \mathrm{OA'A}$). Rezultă $\prec \mathrm{ONO'} \equiv \prec \mathrm{AOA'}$ și ON' ∥ AO.
6) a) Unghiurile sunt ascuțite și au laturile respectiv perpendiculare.
b) FM ∥ BH $\Rightarrow \prec \mathrm{FMH} \equiv \prec \mathrm{BHA'} \equiv \prec \mathrm{ACB}$.
$\Delta\,\mathrm{FHM} \equiv \Delta\,\mathrm{ABC}$ (U.L.U)
c) Din congruența de triunghiuri de la b) rezultă [BF] ≡ [AB], [FM] ≡ [AC] și [HM] ≡ [BC].
$\overrightarrow{\mathrm{HD}} + \overrightarrow{\mathrm{HE}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}} \equiv \overrightarrow{\mathrm{MH}} + \overrightarrow{\mathrm{FM}} + \overrightarrow{\mathrm{HF}} = \overrightarrow{\mathrm{O}} \Rightarrow$ H este centrul de greutate al triunghiului DEF.

BIBLIOGRAFIE

1) Niculescu L. și alții – Exerciții și probleme pentru clasa a IX-a, Editura Cardinal, 2004
2) Țiteica Gh. – Probleme de geometrie, Editura Tehnică, 1981.

prof. Gabriela Oprea