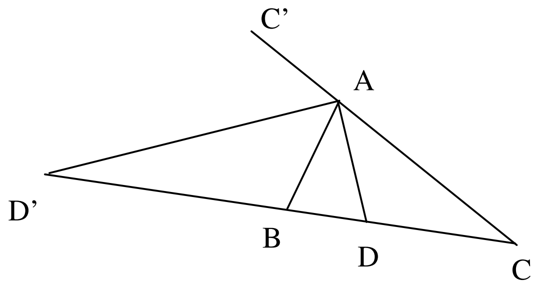
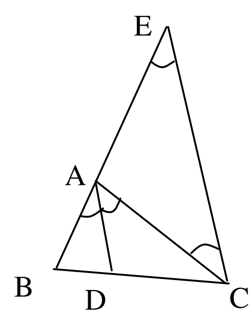
TEOREMA BISECTOAREI

Definiție. Se numește bisectoare interioară a unghiului $\prec A$ al triunghiului ABC, bisectoarea unghiului BAC. Dacă AB < AC, se numește bisectoarea exterioară a unghiului $\prec A$ al triunghiului ABC, bisectoarea unghiului $\prec BAC'$ unde (AC' este semidreapta opusă semidreptei (AC. În figura alăturată [AD este bisectoarea interioară a unghiului A, iar [AD' este bisectoarea exterioară a unghiului $\prec A$.



Observație. Bisectoarea interioară și bisectoarea exterioară ale unui unghi sunt perpendiculare.
Teorema 1. (**Teorema bisectoarei interioare și reciproca acesteia**). Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$. [AD este bisectoarea unghiului $\prec BAC \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Demonstrație. „$\Rightarrow$”



Construim $CE \parallel AD$, $E \in AB$.

Aplicând teorema lui Thales în Δ ABC obținem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (1).

Avem congruențele de unghiuri $\prec BEC \equiv \prec BAD \equiv \prec DAC \equiv \prec ECA$ de unde deducem că triunghiul ACE este isoscel cu $[AE] \equiv [AC]$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

„$\Leftarrow$”

Presupunem că [AD nu este bisectoarea unghiului BAC. Dacă $D_1 \in (BC)$ este piciorul bisectoarei unghiului BAC, atunci $\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$.

Din ipoteză avem $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Din cele două proporții obținem $\frac{BD}{DC}=\frac{BD_1}{D_1C}$ cu D, $D_1 \in (BC)$ ceea ce este în contradicție cu faptul că există un singur punct interior segmentului (BC) care îl împarte într-un anumit raport.

<u>Teorema 2</u>. (**<u>Teorema bisectoarei exterioare și reciproca acesteia</u>**). Fie triunghiul ABC cu $AB \neq AC$ și $D' \in BC \setminus [BC]$.

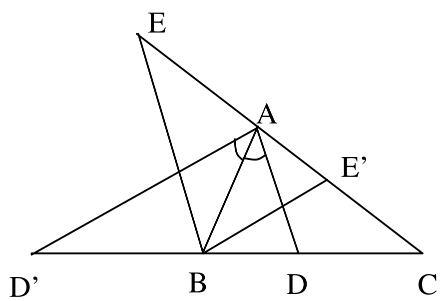
[AD' este bisectoarea exterioară a unghiului BAC $\Leftrightarrow \frac{BD'}{D'C}=\frac{AB}{AC}$.

<u>Demonstrația</u> este asemănătoare cu demonstrația teoremei 1.

<u>Observație</u>. Punctele D și D' din teoremele 1 și 2 sunt conjugate armonic față de punctele B și C.

<u>Teorema 3</u>. (**<u>Teorema celor două bisectoare</u>**) Fie triunghiul ABC și punctele D, D' $\in BC$ care împart segmentul [BC] în rapoarte egale. Dacă $m(\prec DAD')=90^\circ$, atunci [AD și [AD' sunt cele două bisectoare ale unghiului $\prec BAC$ (interioară și exterioară).

<u>Demonstrație</u>.



Construim BE ∥ AD, E $\in AC$ și BE' ∥ AD', E' $\in AC$. Aplicând teorema lui Thales obținem $\frac{EA}{AC}=\frac{BD}{DC}$ și $\frac{AE'}{AC}=\frac{D'B}{D'C}$.

Din ipoteză avem $\frac{BD}{DC}=\frac{D'B}{D'C}$.

Din cele trei proporții deducem [AE] ≡ [AE']. $m(\prec DAD')=m(\prec EBE')=90^\circ$.

În triunghiul dreptunghic EBE' [BA] este mediană de unde rezultă BA=AE=AE' și $\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{AC}=\frac{AB}{AC}$. Aplicând reciproca teoremei bisectoarei deducem că [AD este bisectoarea unghiului $\prec BAC$.

<u>Definiție</u>. În spațiu se consideră un unghi diedru de muchie *d* ale cărei fețe sunt incluse în plane diferite. Se numește semiplan bisector al unghiului diedru, semiplanul mărginit de dreapta *d*, inclus în interiorul unghiului diedru și care formează cu fețele acestuia unghiuri diedre congruente.

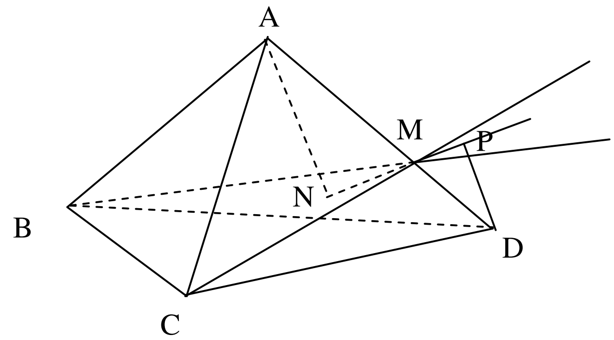
Se demonstrează ușor următoarea:

<u>Propoziție</u>. Un punct interior unui unghi diedru aparține semiplanului bisector al acestuia dacă și numai dacă este egal depărtat de fețele diedrului.

<u>Observație</u>. Semiplanul mărginit de dreapta AB și care conține punctul $M \notin AB$ se notează $(AB, M$.

<u>Teorema 4</u>. (**<u>Teorema semiplanului bisector</u>**). Se consideră tetraedrul ABCD și un semiplan mărginit de dreapta BC, semiplan care intersectează segmentul [AD] în punctul M. Semiplanul $(BC, M$ este semiplanul bisector al unghiului diedru mărginit de semiplanele $(BC, A$ și $(BC, D$ dacă și numai dacă $\frac{AM}{MD}=\frac{A[ABC]}{A[BCD]}$.

Demonstrație.



Fie N și P proiecțiile punctelor A și D pe planul (BCM); punctele M, N și P sunt coliniare. Din asemănarea triunghiurilor ANM și DPM deducem $\frac{\text{AM}}{\text{MD}} = \frac{\text{AN}}{\text{DP}} = \frac{\text{AN} \cdot \text{A[BCM]}}{\text{DP} \cdot \text{A[BCM]}} = \frac{\text{V[ABCM]}}{\text{V[BCDM]}}$.

Pe de altă parte $\frac{\text{V[ABCM]}}{\text{V[BCDM]}} = \frac{\text{A[ABC]}\,d(\text{M},(\text{ABC}))}{\text{A[BCD]}\,d(\text{M},(\text{BCD}))}$ și $\frac{\text{AM}}{\text{MD}} = \frac{\text{A[ABC]}\,d(\text{M},(\text{ABC}))}{\text{A[BCD]}\,d(\text{M},(\text{BCD}))}$.

Dacă $(\text{BC},\text{M}$ este semiplanul bisector, atunci $d(\text{M},(\text{ABC})) = d(\text{M},(\text{BCD}))$ și $\frac{\text{AM}}{\text{MD}} = \frac{\text{A[ABC]}}{\text{A[BCD]}}$.

Dacă $\frac{\text{AM}}{\text{MD}} = \frac{\text{A[ABC]}}{\text{A[BCD]}}$, deducem $d(\text{M},(\text{ABC})) = d(\text{M},(\text{BCD}))$ și M aparține semiplanului bisector.

PROBLEME REZOLVATE

1) Fie D și D' picioarele bisectoarelor interioară și exterioară ale unghiului A al triunghiului ABC. Se notează AB = C, BC = a și AC = b. a) Calculați în funcție de a, b și c lungimile segmentelor BD și DC. b) Dacă AB < AC calculați în funcție de a, b și c lungimile segmentelor BD' și D'C. c) Demonstrați că AD = $\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\text{A}}{2}$.

d) Demonstrați că $\text{AD}^2 = \text{AB} \cdot \text{AC} - \text{BD} \cdot \text{DC}$.

Soluție.

a) $\frac{\text{BD}}{\text{DC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}} \Rightarrow \frac{\text{BD}}{\text{BD}+\text{DC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AB}+\text{AC}} \Rightarrow \text{BD} = \frac{ac}{b+c}$.

DC = $\frac{ab}{b+c}$

b) BD' = $\frac{ac}{b-c}$, D'C = $\frac{ab}{b-c}$.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ABD:

$\frac{\text{AD}}{\sin B} = \frac{\text{BD}}{\sin\frac{\text{A}}{2}}$ de unde AD = $\frac{ac\sin \text{B}}{(\text{b}+\text{c})\sin\frac{\text{A}}{2}}$.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ABC:

$a\sin \text{B} = b\sin \text{A}$.

Înlocuim în relația de mai sus:

$$\text{AD} = \frac{bc\sin \text{A}}{(\text{b}+\text{c})\sin\frac{\text{A}}{2}} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\text{A}}{2}.$$

d) $\text{AD}^2 = \frac{b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\frac{\text{A}}{2} = \frac{b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{p(p-a)}{bc} = \frac{bc}{(b+c)^2}\cdot(a+b+c)(b+c-a) =$

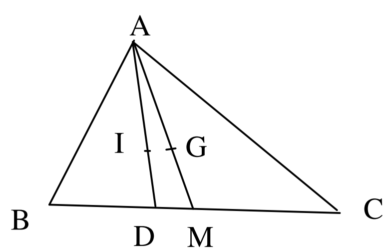
$= \frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2-a^2\right] = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \text{AB}\cdot\text{AC} - \text{BD}\cdot\text{DC}.$

2) Se consideră triunghiul ABC cu AB < AC < BC. [AD și [AD' sunt bisectoarele unghiului $\prec \text{BAC}$, D $\in$ (BC), D' $\in$ BC \ [BC]. Se notează DD' = x și se consideră y și z lungimile segmentelor analoage cu DD' corespunzătoare respectiv unghiurilor $\prec \text{ABC}$ și $\prec \text{ACB}$. Arătați că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$.

Indicație. x = DD' = BD + BD' = $\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b-c}=\frac{2abc}{b^2-c^2}$.

3) Se consideră triunghiul ABC cu centrul de greutate în G și centrul cercului înscris în I. Demonstrați că GI || BC $\Leftrightarrow$ AB + AC = 2BC.

Soluție.

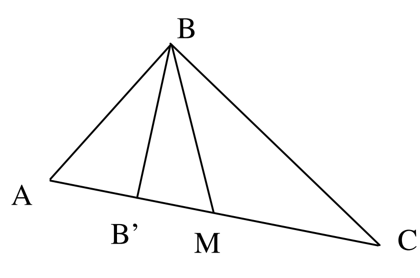


Dacă D este piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\prec \text{A}$ și M este mijlocul laturii [BC], avem $\frac{\text{AI}}{\text{ID}}=\frac{\text{AB}}{\text{BD}}$ și $\frac{\text{AG}}{\text{GM}}=2$.

GI || BC $\Leftrightarrow \frac{\text{AI}}{\text{ID}}=\frac{\text{AG}}{\text{GM}} \Leftrightarrow \frac{\text{AI}}{\text{ID}}=2 \Leftrightarrow \frac{\text{AB}}{\text{BD}}=2 \Leftrightarrow \frac{c(b+c)}{ac}=2 \Leftrightarrow b+c=2a$.

4) În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii [AC], B' este piciorul înălțimii din B și $\prec \text{ABB'} \equiv \prec \text{B'BM} \equiv \prec \text{MBC}$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Soluție.



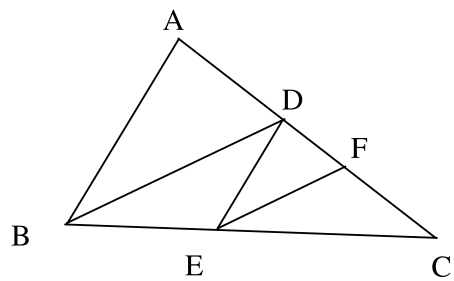
Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul BB'C obținem $\frac{\text{B'M}}{\text{MC}}=\frac{\text{BB'}}{\text{BC}}$.

În triunghiul isoscel AMB avem [AB'] ≡ [B'M], deci $\frac{\text{B'M}}{\text{MC}}=\frac{1}{2}$.

Din cele două propoziții obținem $\frac{BB'}{BC} = \frac{1}{2}$, deci în triunghiul dreptunghic BB'C avem $m(\prec BCB') = 30^\circ$. Rezultă $m(\prec B'BC) = 60^\circ$ și $m(\prec ABC) = 90^\circ$, iar $m(\prec BAC) = 60^\circ$.

5) Se consideră triunghiul ABC cu AB = 20 și BC = 30. Dacă D este piciorul bisectoarei interioare a unghiului B, DE ∥ AB, E ∈ (BC), EF ∥ BD, F ∈ AC și AD − CF = 1, calculați lungimea laturii [AC].

Soluție.



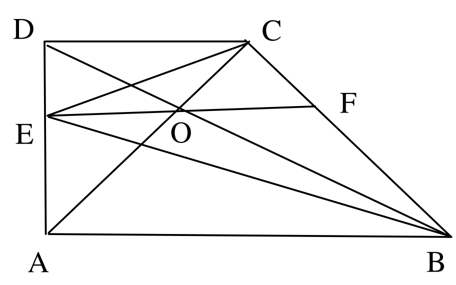
Aplicând teorema bisectoarei obținem AD = $\frac{2AC}{5}$ și DC = $\frac{3AC}{5}$.

Aplicând teorema lui Thales în triunghiurile ABC și BCD obținem $\frac{EC}{BC} = \frac{DC}{AC}$ și $\frac{FC}{DC} = \frac{EC}{BC}$ de unde EC = 18 și FC = $\frac{9AC}{25}$.

Înlocuind în relația din ipoteză avem $\frac{2AC}{5} - \frac{9AC}{25}$ = 1 de unde AC = 25.

6) Se consideră trapezul ABCD cu AB ∥ CD și $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin punctul O la bazele trapezului intersectează dreptele AD și BC respectiv în E și F. Demonstrați că [EF este bisectoarea unghiului $\prec$CEB dacă și numai dacă trapezul este dreptunghic în A și D.

Soluție.



Din asemănarea triunghiurilor COF și CAB apoi COD și AOB obținem

$\frac{CF}{FB} = \frac{CO}{OA} = \frac{CD}{AB}$. (1)

Din AB ∥ EF ∥ CD rezultă $\frac{CF}{FB} = \frac{DE}{EA}$, deci $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{EA}$. (2)

Dacă [EF este bisectoarea unghiului $\prec$ BEC, atunci $\frac{CF}{FB}=\frac{EC}{EB}$ și obținem $\Delta DEC \sim \Delta AEB$ (au laturile proporționale) de unde $m(\prec CDE)=m(\prec BAE)$.

Dar $m(\prec CDE)+m(\prec BAE)=180^\circ$.

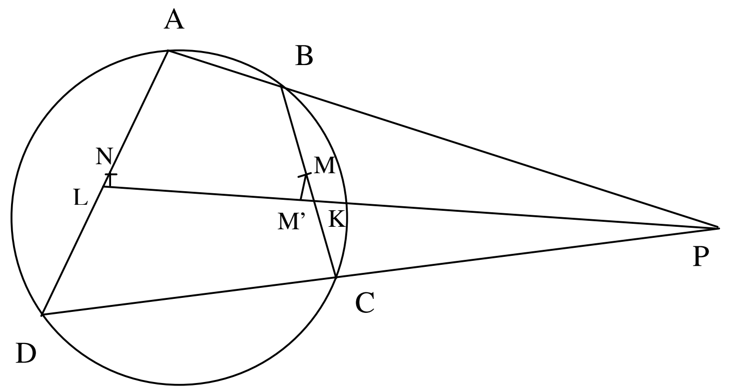
Rezultă $m(\prec BAD)=90^\circ$.

Dacă $m(\prec BAD)=m(\prec ADC)=90^\circ$, folosind (2) deducem $\Delta CDE \sim \Delta BAE$ de unde $\frac{CE}{EB}=\frac{CD}{AB}$.

Folosind (1) rezultă $\frac{CE}{EB}=\frac{CF}{AB}$ deci [EF este bisectoare.

7) Se dă patrulaterul ABCD înscris în cercul *C*. M este mijlocul laturii [BC], N este mijlocul laturii [AD] și P este intersecția dreptelor AB și CD. Demostrați că distanțele de la punctele M și N la bisectoarea unghiului $\prec$ APD sunt proporționale cu lungimile laturilor BC și AD.

Soluție.



Notăm cu L și K punctele de intersecție ale bisectoarei unghiului $\prec$ APD cu AD și BC.

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile PBC și PAD obținem $\frac{PB}{PC}=\frac{KB}{KC}$ și $\frac{PD}{PA}=\frac{LD}{LA}$. Din triunghiurile asemenea PBC și PDA (au două perechi de unghiuri congruente) obținem $\frac{PB}{PC}=\frac{PD}{PA}$.

Din cele trei proporții rezultă $\frac{KB}{KC}=\frac{LD}{LA}$.

Avem KB – KC = (KM + MB) – (MC – KM) = 2KM și LD – LA = 2LN.

Din aceste relații obținem $\frac{KB - KC}{KB + KC}=\frac{LD - LA}{LD - LA}$, adică $\frac{LN}{AD}=\frac{KM}{BC}$ (1)

Dacă M' și N' sunt proiecțiile punctelor M și N pe dreapta PL avem

$m(\prec NLN') = m(\prec KLA) = 180^0 - m(\prec DAB) - m(\prec APL) = m(\prec BCD) - m(\prec LPC) =$

$= 180^0 - m(\prec KCP) - m(\prec LPC) = m(\prec CKP) = m(\prec MKM')$.

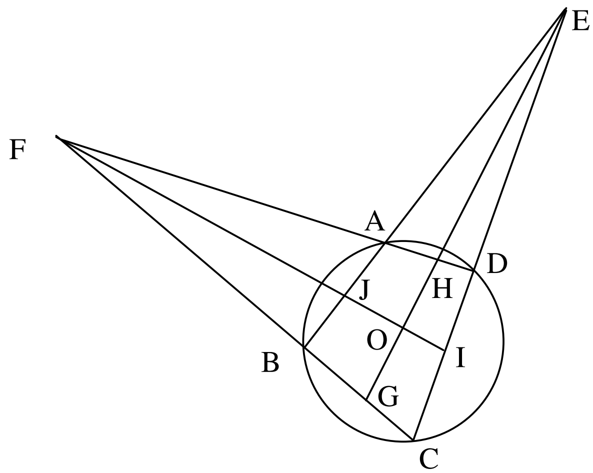
Din această congruență de unghiuri rezultă că triunghiurile dreptunghice M'KM și N'LN sunt asemenea de unde $\frac{MM'}{MK}=\frac{NN'}{NL}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $\frac{MM'}{BC}=\frac{NN'}{AD}$.

8) Se consideră patrulaterul ABCD înscris în cercul *C* astfel încât $AB \cap CD = \{E\}$ și $BC \cap AD = \{F\}$. Bisectoarea unghiului $\prec$ BEC intersectează dreapta AD în H și dreapta BC în G, bisectoarea unghiului $\prec$ CFD intersectează dreapta DC în I și dreapta AB în J. Demonstrați că:

a) Triunghiurile AFC și BFD sunt asemenea; b) $\frac{IC}{ID} = \frac{JA}{JB}$; c) HJ ∥ BD; d) Patrulaterul GIHJ este romb; e) Mijloacele diagonalelor [AC], [BD] și punctul de intersecție al dreptelor EG și FI sunt coliniare.

Soluție.



a) Cele două triunghiuri sunt asemenea deoarece au un unghi comun și $m(\prec ACF) = m(\prec FDB) =$
$= \frac{1}{2} m(\prec AB)$.

b) Din asemănarea de la subpunctul a) obținem $\frac{FC}{FD} = \frac{FA}{FB}$.

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiurile FCD și FAB rezultă $\frac{FC}{FD} = \frac{IC}{ID}$ și $\frac{FA}{FB} = \frac{JA}{JB}$

Din cele trei proporții obținem $\frac{IC}{ID} = \frac{JA}{JB}$.

c) Din asemănarea de la subpunctul a) avem $= \frac{AC}{BD}$.

Aplicând teorema bisectoarei în DAFB obținem $\frac{AJ}{JB} = \frac{FA}{FB}$, deci $= \frac{AC}{BD}$ (1).

Analog se obține $\frac{AH}{DH} = \frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC}$ (2)

Din (1) și (2) rezultă $= \frac{AJ}{BJ}$, deci HJ ∥ BD.

d) $\frac{IC}{ID} = \frac{JA}{JB} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow$ HI ∥ AC.

Analog se demonstrează GJ ∥ AC și GI ∥ BD. Rezultă că patrulaterul GIHJ este paralelogram.

Notăm GE ∩ FI = {O}

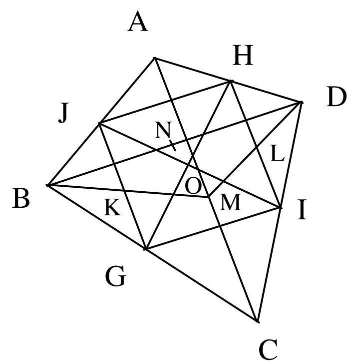
$$m(\prec FOH) = 180^0 - \frac{1}{2} m(\prec CFD) - m(\prec FHO) = 180^0 - \frac{1}{2} m(\prec CFD) -$$
$$-\left[180^0 - \frac{1}{2} m(\prec BEC) - m(\prec EDA)\right] = m(\prec EDA) - \frac{1}{2}\left[180^0 - m(\prec FCD) - m(\prec FDC)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[180^0 - m(\prec EBC) - m(\prec ECB)\right] = m(\prec EDA) + \frac{1}{2} m(\prec FCD) + \frac{1}{2} m(\prec FDC) - \frac{1}{2} m(\prec EBC) -$$

$-\frac{1}{2}m(\prec \mathrm{ECB})=180^0-m(\prec \mathrm{ADC})+\frac{1}{2}m(\prec \mathrm{FCD})-\frac{1}{2}m(\prec \mathrm{EBC})=180^0-\frac{1}{2}m(\prec \mathrm{ADC})-\frac{1}{2}m(\prec \mathrm{EBC})=$

$=180^0-\frac{1}{2}\cdot 180^0=90^0$.

Patrulaterul GIHJ este romb.

e)



Notăm cu M și N mijloacele diagonalelor [AC] și [BD]. Deoarece GJ || AC, mediana BM a triunghiului ABC intersectează segmentul [GJ] în mijlocul acestuia K. Analog DM intersectează segmentul [HI] în mijlocul acestuia L.

Centrul O al rombului HIGJ este mijlocul segmentului [LK]. Dar LK || BD și atunci O aparține medianei MN a triunghiului BMD.

9) Determinați locul geometric al punctelor M pentru care $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=k$, $k>0$, $k\neq 1$, dacă A și B sunt două puncte distincte date.

Soluție. Există două puncte $M_1 \in$ (AB) și $M_2 \in$ (AB) \ [AB] astfel încât $\frac{M_1A}{M_1B}=\frac{M_2A}{M_2B}=k$.

Ele sunt fixe și aparțin locului geometric căutat.

Fie M $\notin$ AB un punct cu proprietatea din enunț. Din $\frac{M_1A}{M_1B}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ și $\frac{M_2A}{M_2B}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ rezultă că [MM_1 și [MM_2 sunt bisectoarele unghiului M al triunghiului MAB. Deoarece $MM_1 \perp MM_2$ deducem că M aparține cercului *C* de diametru [M_1M_2].

Reciproc, fie M un punct al cercului *C*.

Dacă M $\in$ { M_1, M_2} el are proprietatea din enunț.

Dacă M $\in$ *C* \ { M_1, M_2}, deoarece $m(\prec M_1MM_2)=90^\circ$ aplicând teorema celor două bisectoare deducem că (MM_1 și (MM_2 sunt bisectoarele unghiului M al triunghiului MAB, deci $\frac{M_1A}{M_1B}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=k$.

Locul geometric căutat este cercul de diametru [M_1M_2] unde M_1 și M_2 sunt punctele care împart segmentul [AB] în raportul *k*.

Observație. Pentru $k=1$ locul geometric este mediatoarea segmentului [AB].

PROBLEME PROPUSE

1) Se consideră triunghiul ABC. M este mijlocul segmentului [BC], [MD este bisectoarea unghiului $\prec \mathrm{AMB}$, D $\in$ (AB). Dreapta DE este paralelă cu BC, E $\in$ (AC). Demonstrați că [ME este bisectoarea unghiului $\prec \mathrm{AMC}$.

2) Se consideră dreptunghiul ABCD. Bisectoarele unghiurilor BAC și CAD intersectează dreptele BC și CD respectiv în M și N. Demonstrați că $\frac{MB}{MC}+\frac{ND}{NC}>1$.

3) Se consideră triunghiul ABC și E mijlocul laturii [AC]. Paralela prin E la bisectoarea unghiului ABC intersectează dreptele AB și AC respectiv în F și G. Demonstrați că [AF] ≡ [CG].

4) Bisectoarele unghiurilor A și D ale paralelogramului ABCD intersectează dreptele BD și AC respectiv în M și N. Demonstrați că MN ∥ AD.

5) Semidreptele $[AA_1$, $[AA_2$ și $[AA_3$ împart unghiul A al triunghiului ABC în patru unghiuri congruente, $A_1 \in (BC)$, $A_2 \in (A_1C)$, $A_3 \in (A_2C)$. a) Demonstrați că $\frac{A_1B}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3C}\cdot\frac{A_2C}{A_2B}=1$. b) Dacă $[BA_1] \equiv [CA_3]$ demonstrați că triunghiul este isoscel. c) Justificați că nu poate avea loc relația $AA_2^2 = AB\cdot AC$.

6) Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. [AD este bisectoarea unghiului $\prec BAC$, $D\in(BC)$ și [BE este bisectoarea unghiului $\prec ABC$, $E\in(AC)$. a) Demonstrați că $AD=\frac{AB\cdot AC\sqrt{2}}{AB+AC}$.

b) Arătați că $BE+EA=BC$ dacă și numai dacă $\frac{1}{BC}+\frac{1}{AB}=\frac{2}{AC}$. c) Demonstrați că dacă $BE+EA=BC$ atunci $BE^2=AB\cdot AC$.

7) Diagonalele patrulaterului ABCD se intersectează în O. Bisectoarea unghiului $\prec AOB$ intersectează dreptele AB și CD respectiv în E și F. a) Dacă AG ∥ EF, $G\in BD$, demonstrați că triunghiul AOG este isoscel. b) Demonstrați că $\frac{EO}{AG}=\frac{BO}{BO+AO}$. c) Demonstrați că $\frac{\frac{1}{OE}}{\frac{1}{OF}}=\frac{\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}}{\frac{1}{OC}+\frac{1}{OD}}$.

8) Se consideră patrulaterul convex ABCD astfel încât $AB\cap CD=\{S\}$. Se consideră punctele N $\in(BC)$, $Q\in(DA)$ astfel încât $\frac{NB}{NC}=\frac{QA}{QB}=\frac{AB}{CD}$ și punctele A', D' astfel încât patrulaterele ABNA' și DCND' sunt paralelograme. Demonstrați că:

a) Punctele A', Q, D' sunt coliniare.

b) Dreapta NQ este paralelă sau coincide cu bisectoarea unghiului ASD.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1) Aplicând teorema bisectoarei în ΔAMB, teorema lui Thales în ΔABC și reciproca teoremei bisectoarei în ΔAMC.

2) $\frac{MB}{MC}=\frac{AB}{AC}$ și $\frac{ND}{NC}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{MB}{MC}+\frac{ND}{NC}=\frac{AB+AD}{AC} \Rightarrow \frac{AB+AD}{AC}>1$.

3) $\frac{CD}{CE}=\frac{CB}{CG}$ și $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{CD}{AD}\cdot\frac{AE}{CE}=\frac{CB}{CG}\cdot\frac{AF}{AB}$

$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AB}$, $\frac{CE}{CG}=\frac{AE}{AF}$.

4) $\frac{DM}{MB}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{DC}=\frac{AN}{NC}$.

$\frac{DM}{DM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}$; $\frac{DM}{2DO}=\frac{AN}{2AO}$.

5) a) Se înmulțesc egalitățile

$$\frac{A_1B}{A_1A_2}=\frac{AB}{AA_2};\ \frac{A_2A_3}{A_3C}=\frac{AA_2}{AC};\ \frac{A_2C}{A_2B}=\frac{AC}{AB}.$$

b) Notăm $BA_1 = CA_3 = x$, $A_1A_2 = y$, $A_2A_3 = z$.

Înlocuim în relația $A_2A_3 \cdot A_2C = A_2B \cdot A_2A_1$.

$z(z+x) = y(x+y) \Rightarrow (z-x)(x+y+z) = 0 \Rightarrow z = y \Rightarrow x+z = y+z \Rightarrow BA_2 = CA_2$.

În triunghiul ABC, AA_2 este mediană și înălțime.

c) $AA_2^2 = AB \cdot AC \Leftrightarrow \dfrac{AA_2}{AB}=\dfrac{AC}{AA_2} \Rightarrow \Delta ABA_2 \sim \Delta AA_2C \Rightarrow \prec ACB \equiv \prec AA_2B$ contradicție (de ce?)

6) a) Folosiți rezultatul din problema rezolvată 1c).

b) BE = $\dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$, EA = $\dfrac{bc}{a+c}$.

BE + EA = BC $\Leftrightarrow 4acp(p-b) = [a(a+c)-bc]^2 \Leftrightarrow ac\left[(a+c)^2 - b^2\right] =$

$= a^2(a+c)^2 + b^2c^2 - 2abc(a+c) \Leftrightarrow a\left(a^2-c^2\right)+b^2c = 2abc \Leftrightarrow ab^2 + b^2c = 2abc \Leftrightarrow \dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$.

c) Folosiți $BE^2 = AB^2 + AE^2$ sau $BE^2 = ac$ $AE \cdot EC = ac - \dfrac{ab^2c}{(a+c)^2} = \dfrac{2ac^2}{a+c} = bc$

7) Notați OA = a, OB = b, OC = c, OD = d.

a) $\prec OAG \equiv \prec OGA$.

b) $\dfrac{EO}{AC}=\dfrac{BO}{BD}=\dfrac{BO}{BO+OG}=\dfrac{BO}{BO+OA}$.

c) Construiți DH ∥ EF, H ∈ AC. Analog cu subpunctul b se demonstrează $\dfrac{FO}{DH}=\dfrac{OC}{OC+OD}$.

$\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{CF(b+a)DH}{b(d+c)\cdot AG}$; $\dfrac{DH}{AG}=\dfrac{OD}{OG}=\dfrac{OD}{OA}$ etc.

8) a) $\left.\begin{array}{l} AA' \parallel DD' \Rightarrow \prec A'AQ \equiv \prec D'DQ \\ \dfrac{AQ}{QD}=\dfrac{AA'}{DD'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AA'Q \sim \Delta DD'Q \Rightarrow \prec AQA' \equiv \prec DQD' \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A', Q, D' coliniare.

b) $\dfrac{QA'}{QD'}=\dfrac{AQ}{DQ}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'N}{D'N} \Rightarrow$ [NQ bisectoarea $\prec A'ND'$.

Unghiurile A'ND și ASD au laturile respectiv paralele și sunt congruente, rezultă că bisectoarele lor sunt paralele sau coincid.

BIBLIOGRAFIE

1) Botez M. Șt. – Probleme de geometrie, Editura Tehnică, 1976.
2) Brânzei D. și alții – Bazele raționamentului geometric, Editura Academiei R.S.R., 1983.
3) Mihalea D. și alții – Geometria patrulaterului, Editura Teora, 1998.
4) Nicula V. – Geometrie plană. Culegere de probleme, Editura Gil, 2002.
5) Țițeica Gh. – Probleme de geometrie, Editura Tehnică, 1981.