LUCRARE SCRISĂ SEMESTRIALĂ
clasa a XII-a M1
semestrul I

SUBIECTUL I (4 puncte)

(1p) **a)** Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel încât legea de compoziție $*$ definită prin
$$x * y = xy + mx + 3y - 4,\ \forall x, y \in \mathbf{Z}$$
să fie comutativă**.**

(1p) **b)** Să se determine elementul $\hat{a} \in \mathbf{Z}_6$ dacă $\hat{a} = \hat{2} \cdot \hat{4} + \hat{5} + \left(\hat{5}\right)^{-1}$.

(1p) **c)** Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin mx}{x}, x < 0 \\ 2x + 5, x \geq 0 \end{cases}$ să fie primitivabilă pe $\mathbf{R}$.

(1p) **d)** Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{3x+2}}$, $x \in (0;\infty)$.

SUBIECTUL II (2,5 puncte)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^* \right\}$.

(0,5p) **a)** Să se arate că $M(a) \cdot M(b) = M(ab)$, $\forall M(a), M(b) \in G$.

(0,5p) **b)** Să se arate că G este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

(1p) **c)** Să se arate că G este grup abelian.

SUBIECTUL III (2,5 puncte)

Se consideră funcțiile continue $f, g : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to (0,\infty)$.

(0,5p) **a)** Să se arate că $t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

(1p) **b)** Integrând inegalitatea de la subpunctul a) să se demonstreze că
$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} g^2(x) dx \right).$$

(1p) **c)** Folosind eventual subpunctul b) să se demonstreze că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x+1}}{\cos x} dx \leq \frac{\sqrt{2\pi(\pi+8)}}{8}$.

Notă: Se acordă un punct din oficiu.
Timp de lucru: 50 de minute.

prof. Gabriela Oprea
Liceul Grigore Moisil
Timişoara