O ABORDARE GEOMETRICĂ A UNOR LIMITE DE ŞIRURI

de prof. Gabriela Oprea

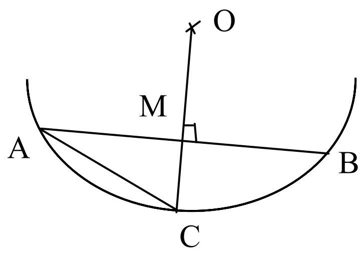
În unele manuale şi culegeri de analiză matematică sunt propuse spre rezolvare exerciții în care se cere determinarea limitelor şirurilor cu termenul general $a_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sau $b_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ radicali}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru rezolvarea lor se porneşte de la ideea că $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$, iar $\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (în cazul şirului (a_n)) şi $\sqrt{3} = 2\cos\frac{\pi}{3}$, iar $\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ radicali}} = 2\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (în cazul şirului (b_n)). De fapt folosirea acestor artificii îşi are originea în rezolvarea riguroasă cu ajutorul analizei matematice a unei probleme de geometrie: definiția lungimii unui cerc.

Se consideră $(\mathrm{P}_n)_{n\geq 3}$ un şir de poligoane convexe (P_n are n laturi) înscrise în cercul $\mathscr{C}$. Se notează L_n cea mai mare latură a poligonului P_n şi cu p_n perimetrul acestuia. Se demonstrează că dacă $\mathrm{L}_n \to 0$, atunci şirul (p_n) este convergent şi limita lui, l, depinde numai de cercul $\mathscr{C}$.

Limita comună a tuturor şirurilor perimetrelor (p_n) de poligoane convexe P_n cu $\mathrm{L}_n \to 0$ înscrise în cercul $\mathscr{C}$ se numeşte lungimea cercului $\mathscr{C}$. Pentru detalii puteți să consultați [2].

Considerăm două puncte A şi B pe cercul $\mathscr{C}(0;\mathrm{R})$ astfel încât AB este latura poligonului regulat cu n laturi înscris în acesta şi notăm $\mathrm{AB} = l_n$.



Dacă punctul C este mijlocul arcului AB, atunci $\mathrm{AC} = l_{2n}$. Notăm cu M mijlocul laturii [AB] şi calculăm:

$$\mathrm{OM} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OM}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - l_n^2}$$

$$\mathrm{MC} = \mathrm{OC} - \mathrm{OM} = \mathrm{R} - \frac{1}{2}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - l_n^2} \text{ şi}$$

$$l_{2n} = \mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AM}^2 + \mathrm{MC}^2} = \sqrt{\mathrm{R}\left(2\mathrm{R} - \sqrt{4\mathrm{R}^2 - l_n^2}\right)} \qquad (1)$$

În continuare voi da o soluție geometrică a celor două probleme menționate la început.

<u>Problema 1</u>. Calculați limita şirului $a_1 = 2\sqrt{2}$, $a_2 = 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_3 = 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., $a_n = 2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$, ...

<u>Soluție</u>. Considerăm cercul $\mathscr{C}(0;1)$. Folosind formula (1) obținem succesiv: $l_4 = \sqrt{2}$; $l_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$; $l_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; ..., $l_{2^{n+1}} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}}$.

$$p_{2^{n+1}} = 2^{n+1} \cdot l_{2^{n+1}}$$

Folosind definiția lungimii cercului avem $\lim p_{2^{n+1}} = 2\pi$. Deoarece $a_n = \frac{1}{2} p_{2^{n+1}}$, rezultă $\lim a_n = \pi$.

<u>Problema 2</u>. Calculați limita şirului $b_1 = 2\sqrt{3}$, $b_2 = 2^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $b_3 = 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, ..., $b_n = 2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ radicali}}$, ...

<u>Soluție</u>. Considerăm cercul $\mathscr{C}(0;1)$. Avem $l_6 = 1$, $l_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $l_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, ..., $l_{(3\cdot 2^n)} = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{n \text{ radicali}}$, ...

Atunci $b_n = \frac{1}{3} p_{(3\cdot 2^n)}$ şi $\lim b_n = \frac{2\pi}{3}$.

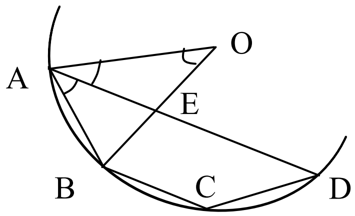
Puteți generaliza exercițiile de mai sus considerând un cerc de rază $\mathrm{R} \neq 1$.

Vă propun să compuneți şi să rezolvați o problemă asemănătoare pornind de la poligoanele regulate cu 5, 10, 20, ..., $5 \cdot 2^n$, ... laturi. Pentru aceasta trebuie să calculați mai întâi l_5 sau l_{10} dacă optați pentru soluția geometrică, sau $\cos\frac{\pi}{5}$ dacă optați pentru ideea de la începutul articolului.

O soluție simplă pentru calculul numărului $\cos\frac{\pi}{5}$ găsiți în [1] la pagina 117.

Pentru determinarea numerelor $\cos\frac{\pi}{5}$ şi l_{10} vă prezint în continuare o soluție geometrică.

Fie A, B, C şi D patru vârfuri consecutive ale decagonului regulat înscris în cercul $\mathscr{C}(0;\mathrm{R})$; notăm $\mathrm{AD}\cap\mathrm{BO}=\{\mathrm{E}\}$.



$\mu(\prec\mathrm{AOB})=\frac{\pi}{5}$; $\mu(\prec\mathrm{OAB})=\mu(\prec\mathrm{OBA})=\frac{2\pi}{5}$.

$\mu(\prec\mathrm{ABE})=\mu(\prec\mathrm{AEB})=\frac{2\pi}{5}\Rightarrow\mathrm{AB}=\mathrm{AE}=l_{10}$.

$\mu(\prec\mathrm{EAO})=\mu(\prec\mathrm{AOE})=\frac{\pi}{5}\Rightarrow\mathrm{AE}=\mathrm{OE}=l_{10}$.

Aplicând teorema bisectoarei în triunghiul ABO obținem $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{OE}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AO}}$ şi prin înlocuire $\frac{\mathrm{R}-l_{10}}{l_{10}}=\frac{l_{10}}{\mathrm{R}}$. Această ecuație are soluția pozitivă $l_{10}=\frac{\mathrm{R}(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul OAB obținem $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Coța A. şi alții – Matematică, geometrie şi trigonometrie. Manual pentru clasa a IX-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1995.

[2] Dinculeanu W. şi Radu E. – Elemente de analiză matematică, manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.