LIMITE DE FUNCȚII
probleme pregătitoare pentru lucrarea de control

1. Completează următoarele enunțuri astfel încât să obții propoziții adevărate:
   a) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$ şi $(x_n)\subset\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $x_n\to 3$, atunci şirul $f(x_n)$ are limita...
   b) Dacă $f:(1;5)\to\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$, atunci limita la stânga a funcției f în punctul 2 este...
   c) Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall x>0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ este...
   d) Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$, atunci $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$ este...
2. Dă câte un exemplu de:
   a) funcții $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care nu au limită în punctul 2 şi $f+g$ are limită în punctul 2;
   b) funcție care în punctul 3 are limitele laterale infinite şi diferite;
   c) funcție care nu are limită în ∞;
   d) funcții $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.
3. Stabileşte valoarea de adevăr a propozițiilor:
   a) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x_n),(x_n^{'})\subset\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $x_n\to 2$, $x_n^{'}\to 2$, $f(x_n)\to 1$ şi $f(x_n^{'})\to -1$ atunci f nu are limită în punctul 2.
   b) Dacă funcția f nu are limită în punctul a, atunci cel puțin una din limitele laterale ale funcției f în punctul a este infinită.
   c) Dacă $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ şi g este mărginită, atunci $\lim\limits_{x\to 6}[f(x)/g(x)]=0$.
   d) Există funcții $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.
4. Stabileşte dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:
   a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos\dfrac{5}{x}$, $\alpha=0$;
   b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2k}\middle| k\in\mathbb{Z}^*\right\}$, $f(x)=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2x}$, $\alpha=0$;
   c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x & , x\in\mathbb{Q}\\ 2x+3 & , x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $\alpha=1$ şi $\alpha=3$.
5. Calculează limitele laterale ale următoarelor funcții în punctele specificate:
   a) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$, $\alpha=2$, $\alpha=-2$;
   b) $f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-1}$, $\alpha=1$, $\alpha=2$.
   c) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$, $\alpha=2$.
   d) $f:\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{\frac{1}{\operatorname{ctg}x-1}}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.
6. Calculează:
   a) $\lim\limits_{x\to 5}\left[(x-5)\cos\dfrac{1}{x-5}\right]$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\ln x)(\operatorname{arctg} x)]$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2\cos x}{5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]+[4x]+[9x]}{x}$.

7. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{x-9}{x^2-9}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}\right)\cdot\left(\dfrac{x-x^2}{1-2x+2x^3-x^4}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{|x^2-2|}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{|x-1|}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{x-2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x+1}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}\right)$;

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+5x+1}+x\sqrt{3}\right)$.

8. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 10x}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{1-\cos 9x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x+\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 12x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{2\cos^2 x-1}}{\operatorname{tg}^2 x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{\operatorname{tg}(4x^2-1)}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{\sqrt{x+6}-3}$.

9. Calculează:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sin 2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-2}{x-\dfrac{\pi}{4}}$;

c) $\lim_{x\to\infty}\left(2^x+5^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+2)-\ln x}{\ln(x-1)-\ln x}$;

e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$;

f) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x+1}\right)^{5-x}$;

g) $\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$;

h) $\lim_{x\to\infty}\left(x^{\sin\frac{1}{x}}\right)$.

10. Determină parametrii reali a şi b în fiecare din cazurile:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}+ax+b\right)=3$;

b) $\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{(b+1)x+1}{3x^2+1}\right)^{2x+a}=e^{-2}$;

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+3x+1}-\sqrt{4x^2+bx}\right)=-2$;

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}-\sqrt[3]{x^3+bx^2+1}\right)=\frac{1}{3}$.

11. Determină $m\in\mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să aibă limită în punctele indicate:

a) $f:(0;3)\cup(3;4)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} m+\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-3}}}, & x\in(0;3)\\ \dfrac{\sin(x-3)}{2x-6}, & x\in(3;4)\end{cases}$, $\alpha=3$;

b) $f:(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{m}{4\sin x}}, & x\in(0;\ 1)\\ \left(1+\dfrac{m-\sqrt{m^2-x^2}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\in(-1;\ 0)\end{cases}$, $m\geq 1$, $\alpha=0$.

prof. Gabriela Oprea