METODE NONSTANDARD ÎN CALCULUL UNOR DETERMINANȚI

1) Să se calculeze determinantul Δ al matricei $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$.

<u>Suluție</u>: Calculăm produsul dintre A și ${}^{T}A$.

$A^{T}A = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) I_4$.

Aplicând determinantul obținem $\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^4 = \det\left(A \cdot {}^{T}A\right) = (\det A)(\det {}^{T}A) = \Delta^2$ de unde

$\Delta = \pm\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$.

Pentru a stabili semnul rezultatului observăm că în dezvoltarea determinantului Δ produsul elementelor de pe diagonala principală este ($-a^4$), deci $\Delta = -\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2$.

2) Ideea de mai sus poate fi folosită și la rezolvarea exercițiului:

Să se calculeze Δ^2 unde Δ este determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & x_1^2 \\ -1 & x_2 & -x_2^2 \\ 1 & -x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$ iar x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $2x^3 - x^2 + 2x - 4 = 0$.

<u>Indicație</u>: Se calculează $\left({}^{T}A\right) \cdot A$.

3) Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ba & 1+b^2 & bc & bd \\ ca & cb & 1+c^2 & cd \\ da & db & dc & 1+d^2 \end{vmatrix}$.

<u>Soluție</u>: Adăugăm o linie și o coloană astfel încât determinantul obținut să fie egal cu Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & ab & ac & ad \\ b & ba & 1+b^2 & bc & bd \\ c & ca & cb & 1+c^2 & cd \\ d & da & db & dc & 1+d^2 \end{vmatrix}$$

Din elementele coloanei a doua scădem elementele primei coloane înmulțite cu a, din elementele coloane a treia scădem elementele primei coloane înmulțite cu b etc.

Se obține $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & -b & -c & -d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Dezvoltând după coloana a doua obținem

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -b & -c & -d \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -c & -d \\ c & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1.$$

4) Ideea din exercițiul 3 poate fi folosită și în calculul determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix}$

(Dacă preferați, puteți să faceți calculele „muncitorește” dezvoltând după regula triunghiului).
Iată ideea de pornire

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a^2 - x & ab & ac \\ b & ba & b^2 - x & bc \\ c & ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix}$$

Faceți operații cu coloanele astfel încât să scăpați de elementele care sunt la puterea a doua.
În final se obține $\Delta = x^2\left(a^2 + b^2 + c^2 - x^2\right)$.

prof. Gabriela Oprea