FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE, INVERSABILE
(probleme pregătitoare pentru lucrarea de control)

1.
   a) Să se determine valorile lui a astfel încât funcția $f:\{1;2;3\}\to\{1;2;3;4\}$, $f(1)=2$, $f(2)=1$ și $f(3)=a$ să fie injectivă.
   b) Să se determine valorile lui a astfel încât funcția $f:\{1;2;3;4\}\to\{5;6;7\}$, $f(1)=5$, $f(2)=6$, $f(3)=5$, $f(4)=a$ șă fie surjectivă.
   c) Să se determine mulțimea B astfel încât funcția $f:\{1;2;3\}\to \mathrm{B}$, $f(x)=x^2+1$ să fie inversabilă. În acest caz să se determine f^{-1}.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ inversabilă și se notează cu g inversa acesteia.
   a) Să se determine $(f\circ g)(3)$.
   b) Să se determine $(g\circ f)(\sqrt{2})$.
   c) Dacă $f(x)=3x+1$ să se determine $g(5)$.
3. Să se determine mulțimea E astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie surjectivă:
   a) $f:(0;\infty)\to \mathrm{E}$, $f(x)=[x]$;
   b) $f:(-\infty;1]\to \mathrm{E}$, $f(x)=-3x+2$;
   c) $f:\mathbb{R}\to \mathrm{E}$, $f(x)=-x^2+4x$;
   d) $f:\mathbb{C}\to \mathrm{E}$, $f(z)=|z|$.
4. Să se determine o mulțime D astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie injectivă:
   a) $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$, $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}$;
   b) $f:\mathrm{D}\to\mathbb{C}$, $f(z)=|z|$, $\mathrm{D}\subset\mathbb{C}$;
   c) $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$, $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}$;
   d) $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}$.
5. Să se determine funcțiile bijective de gradul unu $f:[0;1]\to[1;3]$.
6. Să se dea câte un exemplu de funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ astfel încât:
   a) f este injectivă și nu este surjectivă;
   b) f este surjectivă și nu este injectivă;
   c) f nu este injectivă și nici surjectivă;
   d) f este bijectivă.
7. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:
   (p1) Orice funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică nu este injectivă.
   (p2) Există funcții $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$ $(\mathrm{D}\subset\mathbb{R})$, periodice și surjective.
   (p3) Există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pare și injective.
   (p4) Există funcții $f:\{1;2;3\}\to\{1;2;3;4\}$ inversabile.
8. Să se studieze injectivitatea și surjectivitatea funcțiilor:
   a) $f:[-1;3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$;
   b) $f:[3;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$;
   c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$;
   d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x+2 & ,\ x\le 1\\ x^2 & ,\ x>1\end{cases}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x & , x<0\\ \sin x & , x\geq 0\end{cases}$.

9. Să se demonstreze că următoarele funcții sunt inversabile și să se determine inversa fiecăreia dintre ele:
   a) $f:(-\infty;-2)\to(-\infty;-7)$, $f(x)=2x-3$;
   b) $f:[2;\infty)\to(-\infty;4]$, $f(x)=-x^2+4x$;
   c) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{1}{2}z+\frac{2}{3}\bar{z}$;
   d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x;y)=(2x+5y;4y-2x)$;
   e) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=n+(-1)^n$.
10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie bijectivă:
    a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x+7 & , x\leq 1\\ mx+13 & , x>1\end{cases}$;
    b) $f:[-1;\infty)\to[m;\infty)$, $f(x)=\sqrt[3]{x}+2$;
    c) $f:(-\infty;2]\to(-\infty;m]$, $f(x)=-x^2+4x+3$.
11. Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=2x$.
    a) Să se arate că nu există funcții $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $f\circ g=1_{\mathbb{N}}$.
    b) Să se arate că există o infinitate de funcții $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ astfel încât $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$.
12. Se consideră funcțiile $f,g:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$ astfel încât $f\circ g\circ f$ este bijectivă. Să se demonsteze că f și g sunt bijective.

prof. Gabriela Oprea