Forma algebrică a unui număr complex

1. Fie $E(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z^2+1}$ şi $z_1=1+i, z_2=1-i$. Calculați $E(z_1), E(z_2)$.

2. Precizați partea imaginară a numărului complex $\dfrac{1}{4+3i}+\dfrac{(2-i)^2}{1+i}-\dfrac{i}{4i-3}+\dfrac{6}{2-i}$.

3. Să se determine $\alpha \in R$ astfel încât numărul complex $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$ să fie real.

4. Să se arate că $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ este soluție a ecuației $x^2+x+1=0$ şi să se deducă de aici că $z^3=1$.

5. Pentru $a,b,c \in R$ şi $\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze expresia
$E=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ şi să se arate că $E \in R$.

6. Să se rezolve următoarele ecuații:

a) $2z+6i=\dfrac{1}{2i}z+5i-7$;

b) $(1+3i)z+\dfrac{1-i}{1+i}=(3-2i)z+5$;

c) $|z|+z=3+4i$;

d) $z^2-4|z|+3=0$;

e) $4z^2+8|z|^2-3=0$;

f) $z^2=2i$;

g) $z^3=2+11i$.

7. Să se determine numărul complex z astfel încât:

a) $\left|\dfrac{z-12}{zi+8}\right|=\dfrac{5}{3}$ şi $\left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1$ b) $|z|=|1-z|=\left|\bar{z}^2\right|$ c) $|z-i|=|z-1|=|z+iz|$

8. Să se demonstreze următoarele identități peste C:

a) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

b) $|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2+|z_1+z_2+z_3|^2=3\left(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right)$;

9. Să se afle numerele complexe $z=x+iy, x,y \in R^*$, de modul $\sqrt{2}$, astfel încât $(x+iy^2)^3$ să fie imaginar.

10. Să se determine mulțimea $A = \left\{ a \in C \middle| \frac{a+i}{a-1+2i} \in R \right\}$.

11. Se consideră funcția $f : C \to C, f(z) = 3z - 2\overline{z}$.

a) Să se verifice că $\overline{f(z)} = 3\overline{z} - 2z, (\forall) z \in C$.

b) Să se arate că $(f \circ f)(z) = 13z - 12\overline{z}, (\forall) z \in C$.

c) Să se demonstreze utilizând metoda inducției matematice, că

$\underbrace{(f \circ f \circ ... \circ f)}_{n \text{ ori}}(z) = \frac{5^n + 1}{2} z - \frac{5^n - 1}{2} \overline{z}$.

12. Se consideră funcția $f : C \to C, f(z) = 8z - \overline{z}$.

a) Să se verifice că $f(x + iy) = 7x + 9yi, (\forall) x, y \in R$.

b) Să se rezolve ecuația $f(z) = 0$.

c) Să se arate că f este injectivă.

d) Să se arate că f este surjectivă.

13. Dacă $|z_1| = |z_2| = r > 0$, atunci $\frac{z_1 + z_2}{r^2 + z_1 z_2} \in R$.

14. Dacă $|z_k| = r > 0, k = \overline{1,n}, n \in N^*$ atunci expresia

$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)...(z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 ... z_n} \in R$.

15. Dacă $z \notin R$ şi $\frac{z^2 - z + 1}{z^2 + z + 1} \in R$ atunci $|z| = 1$.

16. Fie $z_k \in C, k = \overline{1,3}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $\frac{1 + z_1 z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \in R$. Să se arate că $z_1 z_2 z_3 = -1$ sau $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.

17. Fie $z \in C \setminus \{-1\}$. Să se arate că $|z| = 1$ dacă şi numai dacă există $\lambda \in R$ astfel încât $z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$.

18. Să se rezolve inecuația $z^2 + z \le 0$.

19. Să se calculeze expresia $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$, unde $n \in N^*$.

20. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^3 - (2\sqrt{3} + 3i)z^2 + (1 + 4\sqrt{3}i)z - 3i - 6\sqrt{3} = 0$, ştiind că admite soluții de forma bi, $b \in R$.

21. În mulțimea numerelor complexe se consideră următoarele ecuații:

$(e) z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0$;

$(f) z^3 + 8 = 0$.

a) Să se demonstreze următoarea afirmație: z_0 este soluție a ecuației (e) dacă şi numai dacă $z_0 - i$ este soluție a ecuației (f).

b) Să se rezolve ecuațiile date.

22. Să se determine $m \in R$ astfel încât ecuația $(1+2i)z^2 + (2m-i)z - (3+mi) = 0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală.

23. Fie $\omega \in C \setminus R$ şi funcția $f_\omega : C \to C$, unde $f_\omega(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\omega$. Să se arate că funcția f_ω este bijectivă şi să se determine ω astfel încât $f_\omega = f_\omega^{-1}$.

prof. Tiberiu Barta