FUNCȚII TRIGONOMETRICE

1) Să se determine domeniul maxim de definiție $D \subset [0; 2\pi)$ pentru fiecare din următoarele funcții $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; **b)** $f(x) = \frac{3}{2\cos x - 1}$; **c)** $f(x) = \sqrt{\sin x}$; **d)** $f(x) = \sqrt{\cos x}$;
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sin x - 1}}$; **f)** $f(x) = \frac{1}{2\cos^2 x + 3\cos x + 1}$; **g)** $f(x) = \frac{1}{\cos 2x}$;
h) $f(x) = \frac{3\sin x}{\sin 3x - 1}$; **i)** $f(x) = \frac{1}{2\operatorname{tg} x}$; **j)** $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$; **k)** $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$;
l) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$; **m)** $f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; **n)** $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{ctg}^2 x - 3}$.

2) Să se determine punctele de intersecție dintre axele de coordonate și reprezentarea grafică a funcției:

a) $f: [0; \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \sin x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - \cos x$;
c) $f: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos 2x + 1$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 5x$;
e) $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x - 1$;
f) $f: (0; \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = 3\operatorname{ctg}^2 x - 1$;
g) $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \lg(\cos x)$
h) $f: (0; \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \log_5(2 + \sin x)$.

3) Să se stabilească dacă fiecare din următoarele funcții este pară sau impară:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 3x \cos 2x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2+\cos x}{5+\sin^2 x}$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2\sin x}{3-\sin x}$;
d) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{\operatorname{tg} x}$;
e) $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2+\cos x}{5+\operatorname{ctg}^2 x}$;
f) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
g) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg} x$.

4) Să se demonstreze că numărul T este perioadă pentru funcția f în fiecare din următoarele cazuri:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin 5x, \mathrm{T} = 4\pi$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\frac{x}{4}, \mathrm{T} = -8\pi$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos\frac{2x}{3}, \mathrm{T} = -3\pi$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5\sin^2 x - 2, \mathrm{T} = \pi$;
e) $f: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \mathrm{T} = -6\pi$;
f) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} 3x + \sin 6x, \mathrm{T} = \frac{\pi}{3}$.

5) Să se determine perioadele pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\frac{7x}{2}$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos\frac{2x}{3}$;
c) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{4} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 + \operatorname{tg} 2x$;
d) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - \operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

6) Să se determine $\min f$ şi $\max f$ pentru următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 \sin x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 3$;
c) $f: \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
d) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;
e) $f: \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;
f) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$;
g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{5}{2\cos x + 3}$;
h) $f: \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 2 + \operatorname{tg} x$;
i) $f: \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \operatorname{ctg} x$.

7) Să se determine intervalele de monotonie pentru următoarele funcții:

a) $f: [0; \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
b) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;
c) $f: \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;
d) $f: \left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$;
e) $f: \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \to \mathbb{R}, f(x) = 3 \sin x$;
f) $f: \left(0; \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = 2 - \cos x$;
g) $f: (-\pi; \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
h) $f: \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} 3x - 4$;
i) $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$;
j) $f: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \cos x$
k) $f: (0; \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg}(\pi - x)$

8) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât fiecare din următoarele funcții să fie monotonă:

a) $f: \left[\frac{\pi}{3}; a\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;
b) $f: \left[\frac{\pi}{2}; a\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$;
c) $f: \left(a; \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;
d) $f: \left[\frac{5\pi}{4}; a\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$.

9) Să se expliciteze funcțiile:

a) $f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = |\sin x - \cos x|$;
b) $f: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|$;
c) $f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = [\sin x] + [\cos x]$;
d) $f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \{\sin x\}$;
e) $f: \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \max(\operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x)$;
f) $f: \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \min(\sin x; \cos x)$.

10) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Să se determine:

a) $f([0; \pi])$; **b)** $f\left(\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]\right)$; **c)** $f(\mathbb{R})$; **d)** $f\big((-\pi; 0)\big)$; **e)** $f\left(\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

f) $f([3\pi; 4\pi])$; **g)** $f\left(\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

11) Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Să se determine:

a) $f((0; \pi))$; **b)** $f((-\pi; 0))$; **c)** $f\left(\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$; **d)** $f\left(\left[\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right)\right]\right)$; **e)** $f\left(\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}\right)\right)$;

f) $f\left(\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)\right)$; **g)** $f\left(\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]\right)$.

12) Se consideră funcția

$$f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x.$$

Să se determine mulțimea $f^{-1}(\mathrm{A})$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\mathrm{A} = [-1; 1]$; **b)** $\mathrm{A} = [0; 1]$; **c)** $\mathrm{A} = [-1; 0]$; **d)** $\mathrm{A} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; **e)** $\mathrm{A} = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$;

f) $\mathrm{A} = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; **g)** $\mathrm{A} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

13) Se consideră funcția

$$f: [0; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x.$$

Să se determine $f^{-1}(\mathrm{A})$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\mathrm{A} = [-1; 1]$; **b)** $\mathrm{A} = (0; 1)$; **c)** $\mathrm{A} = [-1; 0]$; **d)** $\mathrm{A} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; **e)** $\mathrm{A} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$;

f) $\mathrm{A} = \left(0; \frac{1}{2}\right)$; **g)** $\mathrm{A} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

14) Se consideră funcția

$$f: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Să se determine $f^{-1}(\mathrm{A})$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\mathrm{A} = \mathbb{R}$; **b)** $\mathrm{A} = [0; \infty)$; **c)** $\mathrm{A} = (-\infty; 0)$; **d)** $\mathrm{A} = [0; 1]$; **e)** $\mathrm{A} = (-\infty; \sqrt{3})$;

f) $\mathrm{A} = \{-1; 1\}$; **g)** $\mathrm{A} = [1; \infty)$; **h)** $\mathrm{A} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right]$.

15) Se consideră funcția

$$f: (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Să se determine $f^{-1}(\mathrm{A})$ în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\mathrm{A} = \mathbb{R}$; **b)** $\mathrm{A} = \mathbb{R}^*$; **c)** $\mathrm{A} = (-\infty; 0)$; **d)** $\mathrm{A} = [-1; 1]$; **e)** $\mathrm{A} = [\sqrt{3}; \infty)$;

f) $\mathrm{A} = \{\sqrt{3}; 1\}$; **g)** $\mathrm{A} = (-\sqrt{3}; -1)$; **h)** $\mathrm{A} = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

16) Să se calculeze:

a) $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos(-1)$; **b)** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; **c)** $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \arcsin 0$;

d) $(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}) \cdot (\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}))$; **e)** $\arccos(-1) - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arcctg}(-1)$;

f) $3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; **g)** $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

h) $\arccos 0 - 2\arcsin(-1) + \operatorname{arcctg} 0$.

17) Să se determine domeniul maxim de definiție $D \subset \mathbb{R}$ pentru fiecare din următoarele funcții $f: D \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = \arcsin 3x$; **b)** $f(x) = \arcsin(2x - 3)$; **c)** $f(x) = \arcsin\frac{2x-1}{x-2}$;

d) $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x^2+1}$; **e)** $f(x) = \arccos\frac{x}{3}$; **f)** $f(x) = \arccos\frac{2}{x}$;

g) $f(x) = \arccos\frac{x+2}{2x-3}$; **h)** $f(x) = \arccos\frac{x^2+1}{x^2-3}$; **i)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-3}{x^2+3x-4}$;

j) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(2x-1)}$; **k)** $f(x) = \operatorname{arcctg}\frac{x^2-1}{x^2-7}$; **l)** $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(3x+1)}$;

m) $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-2}}$; **n)** $f(x)=\lg\left(\arccos\frac{x+1}{2x-1}\right)$.

18) Să se determine punctele de intersecție dintre axele de coordonate și reprezentarea grafică a funcției f în fiecare din cazurile:

a) $f:[-2;2]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\frac{x}{2}$;

b) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\pi}{2}+\arcsin x$;

c) $f:\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos 3x$;

d) $f:(-\infty;-1]\cup[1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\frac{1}{x}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}2x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}3x$;

g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{3}$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5\operatorname{arcctg}(x+1)$.

19) Să se calculeze:

a) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; **b)** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; **c)** $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)$; **d)** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$;

e) $\arcsin(\sin 3\pi)$; **f)** $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$; **g)** $\arccos(\cos 5\pi)$;

h) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$; **i)** $\arcsin(\sin 3)$; **j)** $\arcsin(\sin(-7))$; **k)** $\arcsin\left(\sin\frac{5}{2}\right)$;

l) $\arccos(\cos 4)$; **m)** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$; **n)** $\arccos(\cos 11)$.

20) Să se calculeze:

a) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}\right)$; **b)** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right)$; **c)** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}\right)$; **d)** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$;

e) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(5\pi))$; **f)** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; **g)** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$; **h)** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

i) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7}{2}\right)$; **j)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-3))$; **k)** $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}7)$; **l)** $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$.

21) Să se calculeze:

a) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; **b)** $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; **c)** $\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; **d)** $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

e) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; **f)** $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; **g)** $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$; **h)** $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

i) $\cos\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$; **j)** $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; **k)** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; **l)** $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$.

22) Să se calculeze:

a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}7)$; **b)** $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-3))$; **c)** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{5})$; **d)** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-2))$;

e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}4)$; **f)** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-3))$; **g)** $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$; **h)** $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right)$;

i) $\sin(\operatorname{arctg}2)$; **j)** $\cos(\operatorname{arctg}(-3))$.

23) Să se calculeze:

a) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$; **b)** $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)-\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}5+\operatorname{arctg}3)$; **d)** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}3-\operatorname{arcctg}2)$; **e)** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}7+\operatorname{arcctg}2)$;

f) $\sin(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}5)$; **g)** $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

24) Să se demonstreze că:

a) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\operatorname{arcctg}3=\frac{\pi}{4}$;

b) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\arccos\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi$;

d) $2\arccos\frac{3}{4}=\arccos\frac{1}{8}$;

e) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$;

f) $\arccos\frac{1}{7}+\arccos\frac{11}{14}=\frac{2\pi}{3}$.

25) Să se determine numărul real a în fiecare din următoarele cazuri:

a) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\arcsin\frac{2}{3}=\arcsin a$; **b)** $\arccos\frac{2}{3}-\arccos\frac{1}{3}=\arccos a$;

c) $\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 5=\operatorname{arctg} a$; **d)** $\operatorname{arcctg} 3-\operatorname{arcctg} 2=\operatorname{arcctg} a$;

e) $\arcsin\frac{1}{3}+\operatorname{arctg} 2=\operatorname{arcctg} a$.

26) Să se demonstreze că:

a) $\arccos x=2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \forall x\in[-1;1]$;

b) $\operatorname{arcctg} x=\begin{cases}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\geq 0\\ \pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x<0\end{cases}$;

c) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$;

d) $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}0, x\in(0;\infty)\\ -\pi, x\in(-\infty;0)\end{cases}$.

27) Să se stabilească dacă fiecare din următoarele funcții este pară sau impară:

a) $f:[-2;2]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\frac{x}{2}$;

b) $f:\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos(x^2-1)$;

c) $f:(-\infty;-1]\cup[1;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\frac{1}{x}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x^3-x)$;

e) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x^2}$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arcctg}(x^5)$;

g) $f:\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin(5x)-\operatorname{arctg} x$.

28) Să se determine mulțimea valorilor funcției în fiecare din următoarele cazuri:

a) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=2\arcsin x-3$;

b) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=2-3\arccos x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x^2+1)$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2+\sqrt{\operatorname{arcctg} x}$;

e) $f:\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\arccos x}$;

f) $f:[-1;0]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$;

g) $f:\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin^2 x$.

29) Să se demonstreze că fiecare din următoarele funcții este monotonă:

a) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=5\arcsin x-3$;

b) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=1-\arccos x$;

c) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=2\arcsin x+3\arccos(1-x)$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2-3\operatorname{arctg} x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arcctg}(5-3x)$;

f) $f:[-1;1]\to\mathbb{R}, f(x)=(\arccos x)(\operatorname{arctg} x)$.

30) Să se determine intervalele de monotonie pentru fiecare din funcțiile:

a) $f:\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin(x^2-1)$;

b) $f:(-\infty;-2]\cup[2;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\frac{2}{x}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-2x+5)$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arcctg}(5 - x^2)$.

31) Să se stabilească semnul pentru fiecare din următoarele numere:

a) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$; **b)** $\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$; **c)** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; **d)** $\arccos\frac{2}{7}$; **e)** $\operatorname{arctg}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$;

f) $\operatorname{arctg} 8$; **g)** $\operatorname{arcctg}(-3)$; **h)** $\operatorname{arcctg}\sqrt{5}$; **i)** $\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{3}$;

j) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4} - \arccos\frac{1}{3}$; **k)** $\operatorname{arctg}\frac{1}{8} - \operatorname{arctg} 2$; **l)** $\operatorname{arcctg} 2009 - \pi$; **m)** $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2$;

n) $\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{3}$.

32) Să se expliciteze funcțiile:

a) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|\arcsin x + \frac{\pi}{6}\right|$;

b) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|\arccos x - \frac{\pi}{2}\right|$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right|$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left|\operatorname{arcctg} x - \frac{3\pi}{4}\right|$;

e) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = [\arcsin x]$;

f) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \{\arccos x\}$.

g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \max(\operatorname{arctg} x\,; \operatorname{arcctg} x)$;

h) $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \min(\arcsin x\,; \arccos x)$.

33) Să se demonstreze că fiecare din următoarele funcții este inversabilă și să se determine f^{-1}.

a) $f: \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1; 1], f(x) = \sin x$;

b) $f: \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$;

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right] \to [-1; 1], f(x) = \cos 2x$;

d) $f: \mathbb{R} \to (0; 2\pi), f(x) = 2 \operatorname{arcctg} x$;

e) $f: [0; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arcsin(2x - 1)$;

f) $f: [-1; 1] \to [-3\pi; -\pi], f(x) = 2 \arccos x - 3\pi$;

g) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$;

h) $f: \mathbb{R} \to (0; \pi), f(x) = \sqrt{\pi \operatorname{arcctg} x}$.

34) Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin(\sin x).$$

a) Să se demonstreze că funcția f are perioada 2π.

b) Să se expliciteze funcția f pe intervalul $[0; 2\pi)$.

c) Să se reprezinte grafic restricția funcției f la intervalul $[0; 2\pi)$.

d) Să se rezolve ecuația

$$f(x) = \frac{\pi}{4}, x \in [0; 2\pi).$$

e) Să se rezolve inecuația

$$f(x) \leq \frac{\pi}{4}, x \in [0; 2\pi).$$

35) Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

a) Să se demonstreze că funcția f este pară.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că funcția

$$g: [0; \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), g(x) = f(x), \forall x \geq 0$$

este inversabilă şi să se determine g^{-1}.

36) Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

a) Să se demonstreze că funcția f nu este injectivă.

b) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe $[0; \infty)$.

c) Să se determine mulțimea $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$g: [0; \infty) \to \mathrm{A}, g(x) = f(x), \forall x \in [0; \infty)$$

să fie inversabilă şi să se determine g^{-1}.

37) Să se demonstreze că fiecare din următoarele funcții nu este periodică:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \sin x$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + \cos x$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x^2)$.

38) Să se demonstreze că:

a) $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\left|\sqrt{3} \sin x + \cos x\right| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$;

d) $\left|\sin x - \sqrt{3} \cos x\right| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

39) Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\sin 2x + 2(\sin x + \cos x) + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x < \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $2 \cos 2x + 2 \cos x + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

d) $\cos x < \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3}, \forall x \in (0; \pi)$;

e) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

f) $\sin x + \operatorname{tg} x > \sin 2x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

g) $(1 - \sin a)x^2 - 2x \cos a + 1 + \sin a \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$.